

ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Katedra kybernetiky

LABORATORNÍ CVIČENÍ: TŘ – R2

Měření statických a přechodových charakteristik

Jméno apříjmení :	*Kamila Matoušková*
Osobní číslo:	*A04085*
Datum měření:	*13.3. 2007*
Pracovní skupina	*č.3*

ZADÁNÍ REFERÁTU:

1. Nakreslete schéma zapojení pro měření statické a přechodové charakteristiky.

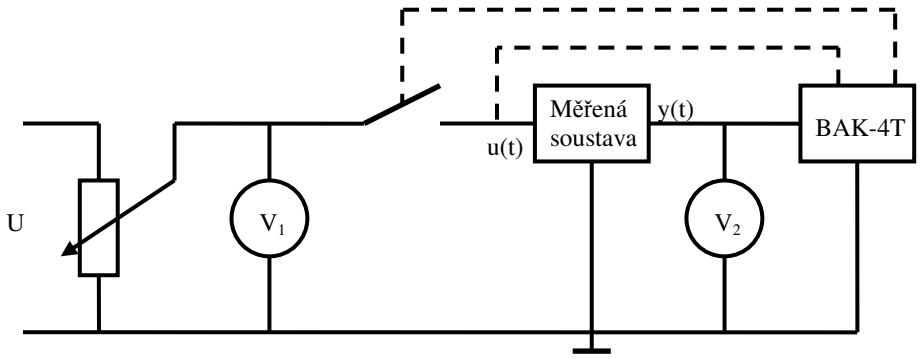
2. Změňte a zaznamenejte (nakreslete) statickou a přechodovou charakteristiku na těchto objektech:
   a) analogový model řízené soustavy,
   b) "černá skříňka".

3. Z naměřených charakteristik proveďte identifikaci parametrů měřených soustav (statické zesílení, časové konstanty).

4. Proveďte zhodnocení získaných výsledků. V případě soustavy ad a) porovnejte identifikované parametry soustavy se skutečnými hodnotami (viz předchozí laboratorní cvičení).

ŘEŠENÍ:

(1) Schéma zapojení



(2) Přechodová a statická charakteristika

Přechodová funkce je odezva systému na jednotkový Heavisideův skok 1[t]. Grafické znázornění přechodové funkce je přechodová charakteristika.

Statická charakteristika vyjadřuje závislost výstupní veličiny y(V) na vstupní veličině u(V) v ustáleném stavu, což je takový stav systému, při kterém se vstupní a výstupní veličiny s časem nemění. Pro lineární prvky je statická charakteristika přímka, jejíž směrnice *k* udává statické zesílení.

(a) Analogový model měřené soustavy

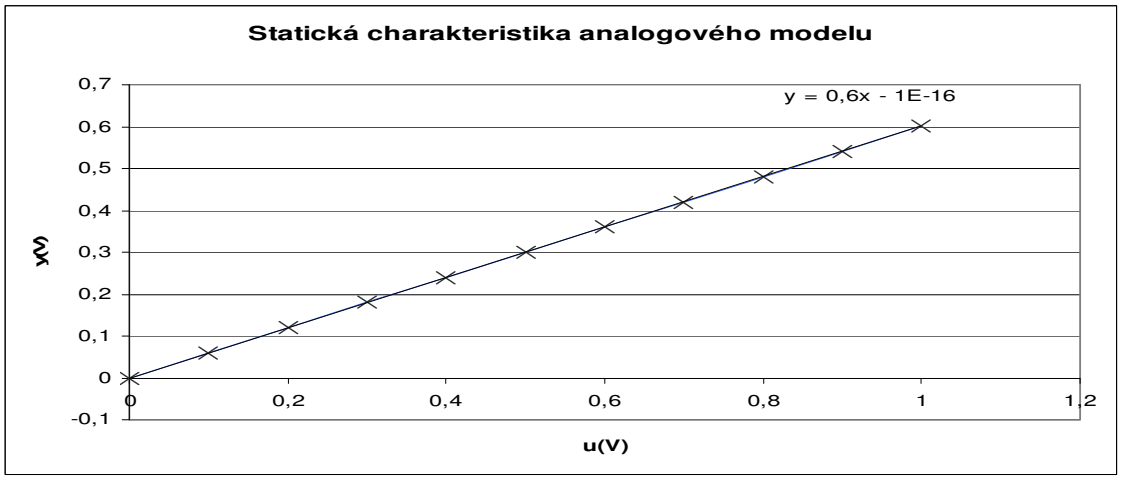
Budeme pracovat se soustavou z předchozího měření, jejíž obrazový přenos je tvaru

$$F(p) = \frac{0{,}6}{p^2 + 0{,}6p + 1}$$

Přechodová charakteristika (viz příloha). Z přechodové charakteristiky je jasně vidět, že jde o přechodovou charakteristiku kmitavou 2. řádu (řád lze určit podle řádu charakteristického polynomu, což je vlastně polynom ve jmenovateli přenosu).

Naměřené hodnoty v ustáleném stavu:

u(V)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y(V)	0,6	1,2	1,8	2,4	3	3,6	4,2	4,8	5,4	6



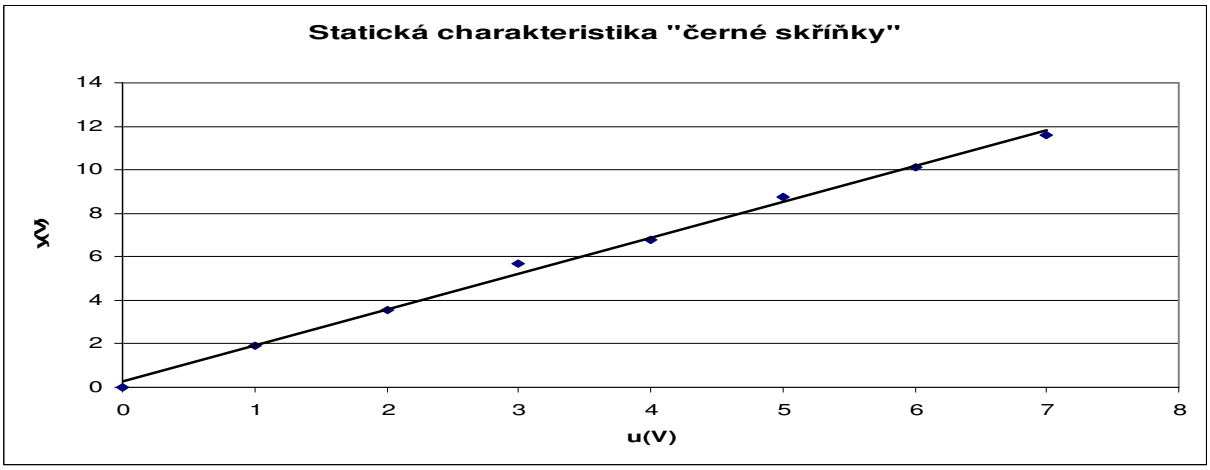
(Body v grafu jsou vypočítané hodnoty z přechodových charakteristik, přímka je pak lineární regrese pomocí metody nejmenších čtverců.)

(b) Černá skříňka (č. 9)

Přechodová charakteristika

Naměřené hodnoty v ustáleném stavu:

u(V)	1	2	3	4	5	6	7
y(V)	2,9	3,5	5,69	6,8	8,75	10,1	11,6



(Body v grafech jsou vypočítané hodnoty z přechodových charakteristik, přímka je pak lineární regrese pomocí metody nejmenších čtverců.)

(3) Identifikace parametrů

(a) Analogový model měřené soustavy

Z grafu jsme odečetli amplitudy A_1, A_2 a π/λ. Dále jsme dopočítali λ a γ podle níže uvedených vztahů. Výsledné hodnoty jsou v následující tabulce:

A_1(V)	0,22	0,40	0,61	0,97	1,15	1,31	1,59	1,78	2,07	2,31
A_2(V)	0,08	0,18	0,25	0,30	0,43	0,5	0,58	0,6	0,64	0,7
π/λ(s)	3,35	3,33	3,35	3,34	3,34	3,34	3,33	3,34	3,34	3,33
λ	0,938	0,943	0,938	0,941	0,941	0,941	0,943	0,941	0,941	0,943
γ	0,302	0,24	0,266	0,351	0,294	0,288	0,303	0,326	0,351	0,358

Ukázkové výpočty:

$$\frac{\pi}{\lambda} = 3{,}35 \quad \rightarrow \quad \pi = 3{,}35\lambda \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi}{3{,}35} = 0{,}938$$

Z logaritmického dekrementu plyne:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{\gamma\frac{\pi}{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \ln\frac{A_1}{A_2} = \gamma\frac{\pi}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{A_1}{A_2}$$

a pro naše hodnoty:

$$\gamma = \frac{\lambda}{\pi}\cdot\ln\frac{A_1}{A_2} = \frac{0{,}938}{\pi}\cdot\ln\frac{0{,}22}{0{,}08} = 0{,}302$$

Průměrné hodnoty:

$\lambda_p = 0{,}9409$

$\gamma_p = \frac{3{,}081}{10} = 0{,}3081$

Dále víme, že:

$\gamma = \xi \cdot q$

$\lambda = q \cdot \sqrt{1-\xi^2}$

$\lambda^2 = q^2 \cdot (1-\xi^2)$

$\xi = \frac{\gamma}{q}$

$\lambda^2 = q^2 \cdot (1-\frac{\gamma^2}{q^2}) \Rightarrow \lambda^2 = q^2 \cdot \frac{q^2-\gamma^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = \lambda^2 + \gamma^2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}$

$\xi = \frac{\gamma}{q} = \pm\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}}$

a protože víme, že soustava je tlumená, tj. pro činitel tlumení musí platit $\xi > 0$, dostáváme jednoznačné řešení:

$$\boxed{\xi = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}} \qquad q = \frac{\gamma}{\xi}}$$

Pro koeficienty a, b ve jmenovateli obrazového přenosu platí vztahy: $\boxed{a = \frac{1}{q^2}; b = 2\xi\sqrt{a}}$

Pro naše hodnoty dostáváme:

$$\boxed{\xi = \frac{0{,}3081}{\sqrt{0{,}9409^2 + 0{,}3081^2}} = 0{,}3112; q = \frac{0{,}3081}{0{,}3112} = 0{,}99 \qquad a = \frac{1}{0{,}99^2} = 1{,}02; b = 2 \cdot 0{,}3112\sqrt{1{,}02} = 0{,}6286}$$

výsledný tvar přenosu $\boxed{F(p) = \frac{k}{1{,}02p^2 + 0{,}6286p + 1}}$

u(V)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y(V)	0,6	1,2	1,8	2,4	3	3,6	4,2	4,8	5,4	6
k	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

Příklad výpočtu: $k = \frac{y}{u} = \frac{0{,}6}{1} = 0{,}6$

Průměrná hodnota: $k_p = 0{,}6$

dále víme, že s použitím Laplaceovy transformace platí vztah :

$$k_L = \lim_{p\to 0} F(p) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{0{,}6}{p^2 + 0{,}6p + 1}\right) = \frac{0{,}6}{1} = 0{,}6$$

dostáváme tak chybu: $\frac{k_p - k_L}{k_L} = \frac{0{,}6 - 0{,}6}{0{,}6} = 0\%$

Z naměřených hodnot můžeme pro kontrolu pomocí metody nejmenších čtverců proložit přímku, jejíž tvar je dán rovnicí $y = k \cdot u + q$, kde $q = 0$ jelikož přímka musí procházet počátkem soustavy souřadnic. Výsledná rovnice je tedy tvaru $y = k \cdot u$, k určuje statické zesílení. Pro metodu nejmenších čtverců platí:

$$y = ku$$

$$y - ku = 0$$

$$Q(k) = \sum_{i=1}^{10} (y_i - ku_i)^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = 2\sum_{i=1}^{10}\left[(y_i - ku_i)(-u_i)\right] = 2\sum_{i=1}^{10}\left(-u_i y_i + ku_i^2\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{10} u_i y_i = k\sum_{i=1}^{10} u_i^2$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{10} u_i y_i}{\sum_{i=1}^{10} u_i^2}$$

po dosazení dostáváme:

$$k_{MNČ} = \frac{231}{385} = 0{,}6$$

Výsledný tvar přenosu: $F(p) = \frac{0{,}6}{1{,}02p^2 + 0{,}6286p + 1}$

Pro kontrolu můžeme ověřit hodnoty pólů přenosu:

$$p_{1,2} = \frac{-0{,}6286 \pm \sqrt{0{,}6286^2 - 4 \cdot 1{,}02}}{2 \cdot 1{,}02}$$

$$p_{1,2} = -0{,}308 \pm j \cdot \sqrt{0{,}89}$$

což se přibližně shoduje s hodnotami vypočtenými ze skutečného přenosu:

$$p_{1,2}' = -0{,}308 \pm j \cdot \sqrt{0{,}89}$$

(b) „černá skříňka“

Z tvaru přechodové charakteristiky je vidět, že se jedná o přechodovou charakteristiku aperiodickou 2. řádu. Pro vyhodnocení je nutné proložit tečnu inflexním bodem. Poté můžeme odečíst časové konstanty T_1 a T_2. Pro vyhledání inflexního bodu jsme zvolili nejstrmější křivku, jelikož v ní je nejlépe odhadnutelný a vznikne tak nejmenší chyba.

$T_1 = 1{,}175$ s
$T_2 = 0{,}15$ s
$T_u = T_2 = 0{,}15$ s…doba průtahu
$T_n = 2$ s…doba náběhu
$T_p = 2{,}15$ s…doba přechodu

Víme, že platí:

$$T_1 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$
$$T_2 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$
$$a = T_1 T_2$$
$$b = T_1 + T_2$$

pro naše hodnoty:

$a = T_1 T_2 = 1{,}525 \cdot 0{,}15 = 0{,}22875$

$b = T_1 + T_2 = 1{,}525 + 0{,}15 = 1{,}675$

dostáváme přenos ve tvaru $F(p) = \frac{k}{0{,}22875 p^2 + 1{,}675 p + 1}$

Statické zesílení vypočítáme opět ze statické charakteristiky:

u(V)	1	2	3	4	5	6	7
y(V)	1,9	3,55	5,69	6,8	8,75	10,1	11,6
k	1,9	1,775	1,8967	1,7	1,75	1,6833	1,6571

Příklad výpočtu:

$$k = \frac{y}{u} = \frac{1{,}9}{1} = 1{,}9$$

Průměrná hodnota:

$$k_p = \frac{1{,}9 + 1{,}775 + 1{,}8967 + 1{,}7 + 1{,}75 + 1{,}68 + 1{,}66}{7} = \frac{12{,}362}{7} = 1{,}76$$

Opět můžeme zkontrolovat uplatněním metody nejmenších čtverců na rovnici přímky $y = k \cdot x$. Postup je zcela stejný jako v případě analogového modelu měřené soustavy v bodu (2)(a), rozdílný je až konec:

$$k_{MNČ} = \frac{\sum_{i=1}^{10} u_i y_i}{\sum_{i=1}^{10} u_i^2} = \frac{238{,}82}{140} = 1{,}71$$

Výsledný přenos dostáváme tedy ve tvaru: $F(p) = \frac{1{,}76}{0{,}22875 p^2 + 1{,}675 p + 1}$

Můžeme ověřit, zda je přenos správný zpětným vypočítáním časových konstant:

$$0{,}22875\,p^2 + 1{,}675\,p + 1 = 0{,}22875(p + 0{,}6556)(p + 6{,}666) = 0{,}22875 \cdot 0{,}6556\left(\frac{1}{0{,}6556}\,p + 1\right) \cdot 6{,}666 \cdot \left(\frac{1}{6{,}666}\,p + 1\right) =$$

$$= 0{,}9997 \cdot (1{,}525\,p + 1) \cdot (0{,}15\,p + 1)$$

$\Rightarrow$ T'_1=1,525 ; T'_2=0,15

(4) ZÁVĚR

Porovnání výsledků:

k_p…průměrná hodnota statického zesílení vypočítaná z přechodových charakteristik
k_L…stat. zesílení vypočítané pomocí limity z obrazového přenosu
$k_{MNČ}$…stat. zesílení určené metodou nejmenších čtverců ze statické charakteristiky
$p_{1,2}$…póly přenosu vypočítané z naměřených hodnot
$p'_{1,2}$... póly přenosu vypočítané ze skutečného přenosu
T_1, T_2…časové konstanty určené z přechodové charakteristiky
T'_1, T'_2… časové konstanty určené zpětnou kontrolou ze získaného přenosu

Analogový model měřené soustavy:

k_p	k_L	$k_{MNČ}$	$p_{1,2}$	$p'_{1,2}$
0,6	0,6	0,6	$p_{1,2} = -0{,}3 \pm j \cdot \sqrt{0{,}91}$	$p'_{1,2} = -0{,}308 \pm j \cdot \sqrt{0{,}89}$

„Černá skříňka“:

k_p	$k_{MNČ}$	T_1	T_2	T'_1	T'_2
1,76	1,71	1,525	0,15	1,525	0,15

Porovnáním přenosů pro analogový model jsme zjistili, že došlo k jistým odchylkám mezi parametry. Statická zesílení k_p, $k_{MNČ}$ a k_L u analogového modelu měřené soustavy jsou shodná, ale nesměrodatnější je pro nás výsledek k_L, který vychází z přesného matematického vztahu. Nevznikají tak tímto postupem chyby při odečítání hodnot z grafu ani postupným zaokrouhlováním. Póly přenosu vyšly až překvapivě podobné. Blízké jsou si i hodnoty statického zesílení u „černé skříňky“. Chyba s největší pravděpodobností vznikla při odečítání hodnot z grafu.